

UWAGA! Zadania nad kreską są obowiązkowe dla wszystkich. Zadania pod kreską z wybranych przedmiotów obowiązują w zależności od wybranego tematu pracy. O zakres dodatkowych pytań spod kreski proszę pytać promotorów.

przedmiot: **Logika i teoria mnogości**

1. Formuły rachunku zdań i rachunku zbiorów oraz metody badania ich prawdziwości. Prawa de Morgana we wszystkich znanych odmianach.
2. Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory. Zmienne wolne i zmienne związane. Prawa rachunku kwantyfikatorów. Metody rachunku funkcji zdaniowych w rozwiązywaniu równań i nierówności.
3. Metoda Schrödera badania formuł zdaniowych, twierdzenie o rozstrzygalności rachunku zdań. Pojęcie dowodu.
4. Pojęcie relacji w produkcie oraz pojęcie funkcji. Obraz i przeciwobraz zbioru poprzez funkcję. Relacja odwrotna i funkcja odwrotna. Pojęcie rodziny zbiorów oraz indeksowanej rodziny zbiorów, pojęcia selektora i funkcji wyboru. Dla jakich obiektów istnienie takiej funkcji gwarantuje odpowiednie twierdzenie?
5. Pojęcie relacji równoważności oraz pojęcia z tym związane. Podstawowe własności relacji równoważności. Konstrukcje zbiorów liczbowych z wykorzystaniem zasady abstrakcji.
6. Zasada Indukcji Matematycznej oraz zasada minimum i zasada maksimum.
7. Pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiory przeliczalne i zbiory nieprzeliczalne. Własności działań na liczbach kardynalnych - twierdzenie Cantora-Bernsteina.
8. Pojęcia punktu stałego przekształcenia, porządku zupełnego oraz pojęcie funkcji ciągłej. Twierdzenie o własnościach funkcji ciągłej między porządkami zupełnymi oraz twierdzenie o punkcie stałym funkcji określonej na porządku zupełnym.
9. Pojęcia porządku częściowego, liniowego i zupełnego. Definicje elementów wyróżnionych podzbiorów, zbiorów uporządkowanych. Twierdzenie o elementach wyróżnionych w podzbiore zbioru częściowo uporządkowanego oraz o związkach między nimi.
10. Pojęcia typu porządkowego i liczby porządkowej. Przedstawić twierdzenia: Cantora (dla typów porządkowych), prawo trichotomii oraz twierdzenie Zermelo.

przedmiot: **Algebra liniowa**

11. Ciało liczb zespolonych (sposoby reprezentacji liczb zespolonych, działania w zbiorze  $\mathbb{C}$ , własności).
12. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych.
13. Twierdzenia o pierwiastkach wielomianów rzeczywistych i zespolonych.
14. Twierdzenia o rozkładzie wielomianów rzeczywistych i zespolonych.
15. Definicja wyznacznika macierzy, metody wyznaczania i własności wyznaczników.
16. Definicja macierzy odwrotnej, własności macierzy odwrotnych. Znane metody odwracania macierzy.
17. Metody rozwiązywania układów równań liniowych (twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, metoda eliminacji Gaussa).
18. Przestrzeń wektorowa (definicja przestrzeni wektorowej, baza i wymiar przestrzeni wektorowej, ważniejsze przestrzenie wektorowe i ich bazy standardowe).
19. Przekształcenia liniowe (definicja przekształcenia liniowego, typy przekształceń liniowych, przykłady przekształceń liniowych, jądro i obraz przekształcenia liniowego).

przedmiot: **Rachunek różniczkowy i całkowy oraz równania różniczkowe**

20. Funkcje elementarne oraz ich własności.
21. Ciągi zbieżne (ciągi liczbowe i funkcyjne; zbieżność punktowa i jednostajna).
22. Granica funkcji (jednej i wielu zmiennych w przestrzeni metrycznej).
23. Funkcje ciągłe (definicja, własności).
24. Definicja pochodnej funkcji (pochodna kierunkowa, pochodna cząstkowa).
25. Funkcja różniczkowalna, różniczka funkcji.
26. Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego.
27. Wzór Taylora.
28. Szeregi liczbowe – kryteria zbieżności.
29. Szeregi funkcyjne – zbieżność jednostajna.
30. Szeregi potęgowe – promień zbieżności.
31. Całka nieoznaczona – definicja, metody całkowania.
32. Całka Riemanna – definicja, własności.
33. Całka Riemanna-Stieltjesa – definicja, własności.
34. Zastosowania całek – przykłady.

35. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych.
36. Całka podwójna – definicja, metody obliczania.
37. Równania różniczkowe liniowe – metody rozwiązywania.
38. Metoda kolejnych przybliżeń rozwiązania równań różniczkowych.
39. Równanie różniczkowe zupełne.
40. Metoda czynnika całkującego.

przedmiot: **Algebra abstrakcyjna**

41. Działanie wewnętrzne. Element neutralny i symetryczny (przeciwny lub odwrotny).
42. Grupa. Grupa abelowa.
43. Podgrupa. Warstwy wyznaczone przez podgrupę.
44. Dzielnik normalny i grupa ilorazowa.
45. Homomorfizmy i izomorfizmy grup.
46. Pierścienie i ciała.
47. Dzielniki zera w pierścieniach.
48. Podpierścienie i ideały. Pierścienie ilorazowe.
49. Homomorfizmy i izomorfizmy pierścieni.
50. Pierścienie wielomianów.

przedmiot: **Informatyka**

51. Sposoby zapisu liczb rzeczywistych i liczb całkowitych w komputerach cyfrowych.
52. Maszyna Turinga jako model komputera.
53. Złożoność czasowa algorytmu.
54. Efektywność, obliczalność, rozstrzygalność, problemy NP-zupełne.
55. Typy danych w języku C++. Klasy w C++.
56. Funkcje w języku C++.
57. Struktury danych używane w programowaniu.

przedmiot: **Matematyka dyskretna**

58. Podstawowe zasady wykorzystywane w zliczaniu obiektów kombinatorycznych.
59. Zasada szufladkowa. Przykłady zastosowania.
60. Zasada włączania-wyłączania.
61. Liczba ciągów, podzbiorów i multizbiorów.
62. Liczby Stirlinga I i II rodzaju.
63. Liczba funkcji (o różnych własnościach) określonych na zbiorze dyskretnym.
64. Rekurencja. Ciągi zdefiniowane rekurencyjnie. Przykłady
65. Pojęcie grafu, przykłady zastosowań i podstawowe parametry grafu.
66. Drzewa i ich własności.
67. Hamiltonowskość i eulerowskość.
68. Spójność, definicje i podstawowe twierdzenia.
69. Planarność, definicja, warunek konieczny i wystarczający, własności.
70. Kolorowanie wierzchołkowe i krawędziowe grafów.

przedmiot: **Rachunek prawdopodobieństwa**

71. Prawdopodobieństwo jako miara. Różne przykłady miar probabilistycznych.
72. Co to jest przestrzeń probabilistyczna?
73. Podstawowe własności miary probabilistycznej.
74. Lemat Borela-Cantelliego i jego interpretacja.
75. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayesa.
76. Zdarzenia niezależne i ich własności.
77. Zmienna losowa jako funkcja mierzalna. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej i sposoby jego wyznaczania.
78. Parametry zmiennych losowych i ich interpretacja.
79. Różne rodzaje zbieżności zmiennych losowych.
80. Nierówności związane z momentami.
81. Rozkład normalny i jego znaczenie w zastosowaniach.
82. Rozkłady typu dyskretnego i przykłady ich praktycznych zastosowań.
83. Prawa wielkich liczb.
84. Centralne twierdzenie graniczne.

85. Rozkład Bernoulliego i jego związki z rozkładem Poissona.

przedmiot: **Statystyka matematyczna**

86. Czym zajmuje się statystyka, czym jest populacja, próba i kiedy jest reprezentatywna?
87. Na czym polega estymacja punktowa i jakie estymatory uważamy za dobre? Wymień własności.
88. Na czym polega estymacja przedziałowa? Podaj szkic konstrukcji przedziału ufności.
89. Podaj wzór na minimalną liczebność próby, aby przedział ufności był o zadanej długości. Wymień problemy z tym związane.
90. Podaj wzór nierówności Rao-Cramera i powiedz do czego jest wykorzystywana.
91. Co to jest estymator największej wiarygodności? Gdzie go wykorzystujemy?
92. Co to jest estymator otrzymany metodą najmniejszych kwadratów? Gdzie go wykorzystujemy?
93. Jak powstają zmienne o rozkładach  $\chi^2$ ,  $F$ -Snedecora oraz  $t$ -studenta?
94. Na czym polega testowanie hipotez statystycznych? Czym są błędy weryfikacyjne?
95. Wymień znane Ci testy statystyczne do weryfikacji hipotezy o równości rozkładów (przynajmniej trzy).
96. Czym jest kowariancja i korelacja zmiennych losowych? Jak ją interpretujemy?
97. Podaj wzór regresji wielorakiej i omów jej parametry. Jak oceniamy „dobroć” modelu?
98. Przedstaw założenia dotyczące reszt w modelu regresji wielorakiej.
99. Opisz nieliniowe modele regresji.
100. Do czego służy i jak działa analiza wariancji?

przedmiot: **Podstawy analizy funkcjonalnej**

101. Zbieżność ciągu w przestrzeni metrycznej i zbieżność ciągu w przestrzeni topologicznej
102. Zbiory otwarte, domknięte, zwarte i ciągłość funkcji w przestrzeni metrycznej i topologicznej.
103. Przestrzenie óśrodkowe.
104. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha. Przykłady.
105. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta.

---

przedmiot: **Wstęp do matematyki finansowej**

1. Pojęcie procesu akumulacji oraz rodzaje tych procesów. Zasada równoważności stóp procentowych w odniesieniu do poszczególnych procesów kapitalizacji.
2. Pojęcia nominalnej i efektywnej stóp procentowych oraz twierdzenie charakteryzujące relacje między nimi.
3. Pojęcie stopy zwrotu oraz twierdzenie o wielookresowej stopie zwrotu. Pojęcie inflacji oraz pojęcie realnej stopy zwrotu – wzór Fishera.
4. Pojęcie renty oraz główne rodzaje rent – ich wartości obecne oraz wartości przyszłe. Renty płatne częściej lub rzadziej niż raz w roku. Wyprowadzenie zależności na ich wartość obecną oraz wartość przyszłą.
5. Renty o nieznanym czasie trwania, nieznannej stopie procentowej – metody wyznaczania. Renty o zmiennej stopie procentowej.
6. Pojęcie czynników akumulującego i dyskontującego. Zagadnienie struktury terminowej stóp procentowych, w tym równoległego przesunięcia struktur terminowych.
7. Pojęcie  $IRR$  oraz warunki konieczny i wystarczający jej istnienia – dowód dowolny spośród nich.
8. Pojęcie  $YTM$  i jego własności – twierdzenie o związku  $YTM$  z  $IRR$ .
9. Obligacje; formuły wyceny, wartość między płatnościami kuponu, wartość księgowa.

przedmiot: **Podstawy ubezpieczeń majątkowych**

1. Podstawowe metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto.
2. Model ryzyka indywidualnego.
3. Model ryzyka łącznego.
4. Funkcja generująca momenty i funkcja generująca kumulanty oraz ich zastosowanie w teorii ubezpieczeń.
5. Podstawowe rozkłady liczby szkód w modelu ryzyka łącznego i odpowiedni wybór danego typu rozkładu.
6. Twierdzenia o dodawaniu dla rozkładów złożonych wykorzystywanych w modelu ryzyka łącznego.
7. Definicja rozkładów z klasy  $(a, b, m)$ . Typy rozkładów z klasy  $(a, b, 0)$  w zależności od parametrów  $a$  i  $b$ .
8. Nadwyżka zmiennej losowej ponad ustaloną wartość i jej wartość oczekiwana.
9. Aproksymacja rozkładu łącznej wartości szkód. Których rozkładów i przy jakich założeniach używamy?
10. Proces nadwyżki ubezpieczyciela i ruina ubezpieczyciela.
11. Moment ruiny, prawdopodobieństwo ruiny w czasie  $(0, t)$ , prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym.

przedmiot **Podstawy ubezpieczeń życiowych**

1. Analityczne modele śmiertelności.
2. Hipotezy interpolacyjne w rozważaniach demograficznych.
3. Tablice trwania życia i ich zastosowanie w ubezpieczeniach.
4. Wartość aktuarialna ubezpieczenia na życie.
5. Wartość aktuarialna renty.
6. Równania różniczkowe w ubezpieczeniach na życie.
7. Funkcje komutacyjne w ubezpieczeniach na życie.
8. Czynniki dyskonta aktuarialnego.
9. Obliczanie składek netto w ubezpieczeniach na życie.
10. Rezerwy w ubezpieczeniach na życie.

przedmiot: **Modelowanie matematyczne**

1. Modelowanie matematyczne w biologii.
2. Stabilność rozwiązań układu równań różniczkowych liniowych.
3. Klasyfikacja punktów krytycznych układów równań różniczkowych liniowych (przypadek dwuwymiarowy).
4. Punkty krytyczne układów równań różniczkowych nieliniowych.
5. Modelowanie drgań mechanicznych.
6. Metoda operatorowa rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych liniowych.
7. Problem programowania liniowego i idea algorytmu sympleks.
8. Zagadnienie transportowe i idea algorytmu transportowego.

przedmiot **Wstęp do metod numerycznych**

1. Metody rozwiązywania równań nieliniowych (wraz z rzędem zbieżności).
2. Interpolacja wielomianowa.
3. Wielomiany Czebyszewa w interpolacji wielomianowej.
4. Interpolacja funkcjami sklejanymi.
5. Proste i złożone kwadratury Newtona-Cotesa.
6. Wielomiany ortogonalne w całkowaniu numerycznym.
7. Kwadratury Gaussa.
8. Różniczkowanie numeryczne.
9. Jednokrokowe metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

przedmiot: **Statystyczne modele liniowe i nieliniowe**

1. Podaj metody transformacji modeli liniowych.
2. Wymień metody doboru zmiennych do modelu regresji wielorakiej.
3. Scharakteryzuj analizę składowych głównych.
4. Przedstaw model analizy czynnikowej.
5. Do czego służy i jak działa analiza kanoniczna?
6. Na czym polega analiza dyskryminacji?
7. Przedstaw aglomeracyjną analizę skupień?
8. Na czym polega metoda  $k$ -średnich?

przedmiot: **Teoria gier w finansach i ubezpieczeniach**

1. Pojęcie gry. Klasyfikacja gier ze względu na różne kryteria.
2. Gry macierzowe. Strategie zdominowane i punkty siodłowe.
3. Równowaga w grach macierzowych. Strategie mieszane.
4. Pojęcie wartości gry w grach macierzowych.
5. Gry w postaci ekstensywnej. Analiza drzewa gry.
6. Strategie w grach dwuosobowych o sumie niezerowej.
7. Równowagi Nasha w grach dwuosobowych o sumie niezerowej.
8. Dylemat więźnia.
9. Wynik gry optymalny w sensie Pareto. Równowagi paretooptymalne.
10. Gry rozwiązywalne w sensie ścisłym.